Spaß mit Kategorien

Eine Einführung in die Kategorientheorie

Nach einem Vortrag von Leonid Grau am 26.09.2022

Fassung vom 27. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Oft betrachtet man allgemeine algebraische Strukturen und trifft Aussagen über diese. Die konkrete algebraische Struktur ist dabei häufig nicht relevant. So gibt es zum Beispiel Strukturen wie Homomorphismen als Gruppenhomomorphismen, Ringhomomorphismen, Lineare Abbildungen oder stetige Abbildungen. Auch den Homomorphiesatz gibt es zum Beispiel für Gruppen und Vektorräume und Produkte sind auch für einige algebraische Strukturen definiert.
Es kann sich also durchaus lohnen ein „Template" zu entwickeln, das in der Lage ist diese Strukturen im allgemeinen zu betrachten ohne dabei auf konkrete Instanzen zu achten.
Die Kategorientheorie bietet ein solches Werkzeug. Sie ist dabei omnipräsent in der algebraischen Geometrie und ist die Sprache der algebraischen Topologie. Auch einige Konzepte der funktionalen Programmierung sind tief in den Konzepten der Kategorientheorie verwurzelt.

2 Grundlagen

Oft betrachtet man in der Kategorientheorie Kategorien und sogenannte Funktoren, die quasi als Abbildungen zwischen Kategorien aufgefasst werden können.

2.1 Kategorien

Zunächst müssen wir definieren was eine Kategorie ist:

Definition 2.1 (Kategorie)**.** Eine Kategorie $\mathscr{C}$ ist:

- eine Klasse von Objekten $\mathsf{ob}\ \mathscr{C}$
- für $A, B \in \mathsf{ob}\ \mathscr{C}$ eine Menge $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ eine Menge von Morphismen zwischen den Objekten
- für $A, B, C \in \mathsf{ob}\ \mathscr{C}$ eine Abbildung $\circ : \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \times \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$ also Verkettung von Morphismen
- Assoziativität der Morphismen bezüglich $\circ$
- Für jedes $A \in \mathsf{ob}\ \mathscr{C}$ ein $id_A \in \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$ mit $id_A \circ f = f$ und $g \circ id_A = g$ für alle $f \in \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A), g \in \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$

Diese Definition ist bewusst recht allgemein gehalten um viele verschiedene Kategorien zu erlauben. Die Morphismen müssen dabei nicht unbedingt Abbildungen sein, sondern lediglich die oben genannte Definition erfüllen. Eine Klasse kann hier für alle Zwecke als Menge betrachtet werden.
Die folgenden Beispiele erfüllen alle oben genannten Axiome und sind daher Kategorien:

Beispiel 2.1 (**Grp**)**.** Ist die Kategorie der Gruppen

- $\mathsf{ob}\ \mathbf{Grp}$ = alle Gruppen
- $\mathsf{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ = Gruppenhompmorphismen von G nach H
- $\circ$: Komposition von Gruppenhomomorphismen

Das ist wohldefiniert und **Grp** ist eine Kategorie.

Beispiel 2.2. Mehr Beispiele

- $\mathbb{K}$-**VR** die Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume und Vektorraumhomomorphismen
- **Ringe** Die Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen
- **Körper** Die Kategorie der Körper und Körperhomomorphismen
- **Set** Die Kategorie der Mengen und aller Abbildungen

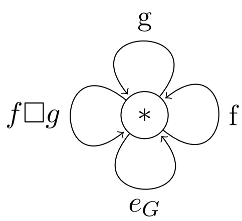
- **Ab** Abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- **Top** Topologische Räume und stetige Abbildungen
- **MRäume** Metrische Räume
- **Euklid** Euklidische Vektorräume und Subisometrien
- **Set*** Kategorie der punktierten Mengen ((M,m), M Menge, $m \in M$ $(M,m) \overset{f}{\mapsto}$ (N,n) Abbildung mit $f(m) = n$)

Beispiel 2.3. Eine Kategorie in der die Morphismen keine Abbildungen sind
Sei $(G, \Box)$ eine Gruppe. **G** ist definiert als:

- $\mathsf{ob}\ G := \{*\}$
- $\mathsf{Hom}_{\mathbf{G}}(*, *) = G$
- für $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{G}}(*, *)$ definiere $f \circ g := f \Box g$
- $id_* = e_G$

Die Morphismen von **G** sind hier also keine Abbildungen, sondern die Elemente der Gruppe.

Oft werden Kategorien mit Hilfe von Graphen dargestellt. Die Objekte werden zu Knoten und die Morphismen zu Kanten. **G** würde daher folgendermaßen dargestellt:



Beispiel 2.4. Kategorie aus einer partiell geordneten Menge
Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge ($\leq$ ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation). **P** ist definiert als:

- $\mathsf{ob}\ \mathbf{P} := P$
- für $x, y \in P$ definiere $\mathsf{Hom}_{\mathbf{P}}(x, y) = \begin{cases} \{*_{xy}\} & x \leq y \\ \varnothing & x \nleq y \end{cases}$
- Sei $f \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{P}}(x, y), g \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{P}}(y, z)$ (also $x = *_{xy}$ und $g = *_{yz}$) dann $*_{yz} \circ *_{xy} = *_{xz}$
- $id_x = *_{xx}$

Diese Kategorie sähe als Graph folgendermaßen aus:

$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

Die Identitätsmorphismen und und Kompositionen der Morphismen werden im Graphen der Übersichtlichkeit halber nicht gezeichnet.

Definition 2.2. Isomorphismus
$f \in \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ heißt Isomorphismus wenn es $g \in \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ existiert mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$

Man kann leicht sehen, dass es in Beispiel 2.4 keine nicht trivialen Isomorphismen geben kann. Dazu wäre es nötig, dass Morphismen der From $*_{yx}$ und $*_{xy}$ existieren. Dazu wäre es aber nötig, dass $x \leq y$ und $y \leq x$ gilt. Daraus folgt, dass $x = y$ gilt und somit der einzige Isomorphismus die Identität ist.

2.2 Funktoren

Es ist uns bereits Möglich Morphismen innerhalb von Kategorien zu definieren. Um auch zwischen Kategorien abbilden zu können und diese so in Relation zu setzen definieren wir Funktoren.

Definition 2.3. Funktor (Kovariant)
Seien $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ ist eine Zuordnung

- $\mathsf{ob}\ \mathscr{C} \mapsto \mathsf{ob}\ \mathscr{D}$ $(A \in \mathsf{ob}\ \mathscr{C} \mapsto \mathcal{F}(A))$
- und eine Zuordnung für $A, B \in \mathsf{ob}\ \mathscr{C}$ mit $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ sodass $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dd, "f \circ g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Wird vom Funktor abgebildet auf

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[dd, "\mathcal{F}(f \circ g)"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(f)"] & \\ & \mathcal{F}(B) \arrow[dl, "\mathcal{F}(g)"] \\ \mathcal{F}(C) & \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.5. Vergissfunktor
$? : \textsf{\textbf{K-Vec}} \mapsto \textsf{\textbf{Set}}$
$(V, +, \cdot) \mapsto V$ bildet einen Vektorraum auf die Menge der Vektoren ab und vergisst dabei alle anderen Informationen wie z.B. über welchem Körper der Vektorraum definiert war und jegliche Operationen.

Beispiel 2.6. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum