

Spaß mit Kategorien

Eine Einführung in die Kategorientheorie

Nach einem Vortrag von Leonid Grau am 26.09.2022

Fassung vom 27. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Grundlagen	2
2.1	Kategorien	2

1 Motivation

Oft betrachtet man allgemeine algebraische Strukturen und trifft Aussagen über diese. Die konkrete algebraische Struktur ist dabei häufig nicht relevant. So gibt es zum Beispiel Strukturen wie Homomorphismen als Gruppenhomomorphismen, Ringhomomorphismen, Lineare Abbildungen oder stetige Abbildungen. Auch den Homomorphiesatz gibt es zum Beispiel für Gruppen und Vektorräume und Produkte sind auch für einige algebraische Strukturen definiert.

Es kann sich also durchaus lohnen ein „Template“ zu entwickeln, das in der Lage ist diese Strukturen im allgemeinen zu betrachten ohne dabei auf konkrete Instanzen zu achten. Die Kategorientheorie bietet ein solches Werkzeug. Sie ist dabei omnipräsent in der algebraischen Geometrie und ist die Sprache der algebraischen Topologie. Auch einige Konzepte der funktionalen Programmierung sind tief in den Konzepten der Kategorientheorie verwurzelt.

2 Grundlagen

Oft betrachtet man in der Kategorientheorie Kategorien und sogenannte Funktoren, die quasi als Abbildungen zwischen Kategorien aufgefasst werden können.

2.1 Kategorien

Zunächst müssen wir definieren was eine Kategorie ist:

Definition 2.1 (Kategorie). Eine Kategorie \mathcal{C} ist:

- eine Klasse von Objekten $\text{ob } \mathcal{C}$
- für $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$ eine Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ eine Menge von Morphismen zwischen den Objekten
- für $A, B, C \in \text{ob } \mathcal{C}$ eine Abbildung $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ also Verkettung von Morphismen
- Assoziativität der Morphismen bezüglich \circ
- Für jedes $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ ein $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ mit $\text{id}_A \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_A = g$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

Diese Definition ist bewusst recht allgemein gehalten um viele verschiedene Kategorien zu erlauben. Die Morphismen müssen dabei nicht unbedingt Abbildungen sein, sondern lediglich die oben genannte Definition erfüllen. Eine Klasse kann hier für alle Zwecke als Menge betrachtet werden.

Die folgenden Beispiele erfüllen alle oben genannten Axiome und sind daher Kategorien:

Beispiel 2.1. Grp Ist die Kategorie der Gruppen

- $\text{ob Grp} =$ alle Gruppen
- $\text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H) =$ Gruppenhomomorphismen von G nach H
- \circ : Komposition von Gruppenhomomorphismen

Das ist wohldefiniert und **Grp** ist eine Kategorie.

Beispiel 2.2. Mehr Beispiele

- **$\mathbb{K}\text{-VR}$** die Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume und Vektorraumhomomorphismen
- **Ringe** Die Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen
- **Körper** Die Kategorie der Körper und Körperhomomorphismen
- **Set** Die Kategorie der Mengen und aller Abbildungen

- **Ab** Abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- **Top** Topologische Räume und stetige Abbildungen
- **MRäume** Metrische Räume
- **Euklid** Euklidische Vektorräume und Subisometrien
- **Set**^{*} Kategorie der punktierten Mengen $((M, m), M \text{ Menge, } m \in M) \xrightarrow{f} (N, n)$ Abbildung mit $f(m) = n$