Spaß mit Kategorien

Eine Einführung in die Kategorientheorie

Nach einem Vortrag von Leonid Grau vom 26.09.2022

Fassung vom 16. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Oft betrachtet man allgemeine algebraische Strukturen und trifft Aussagen über diese. Die konkrete algebraische Struktur ist dabei häufig nicht relevant. So gibt es zum Beispiel Strukturen wie Homomorphismen als Gruppenhomomorphismen, Ringhomomorphismen, Lineare Abbildungen oder stetige Abbildungen. Auch den Homomorphiesatz gibt es zum Beispiel für Gruppen und Vektorräume und Produkte sind auch für einige algebraische Strukturen definiert.

Es kann sich also durchaus lohnen ein „Template" zu entwickeln, das in der Lage ist diese Strukturen im allgemeinen zu betrachten ohne dabei auf konkrete Instanzen zu achten.

Die Kategorientheorie bietet ein solches Werkzeug. Sie ist dabei omnipräsent in der algebraischen Geometrie und ist die Sprache der algebraischen Topologie. Auch einige Konzepte der funktionalen Programmierung sind tief in den Konzepten der Kategorientheorie verwurzelt.

2 Grundlagen

Oft betrachtet man in der Kategorientheorie Kategorien und sogenannte Funktoren, die quasi als Abbildungen zwischen Kategorien aufgefasst werden können.

2.1 Kategorien

Zunächst müssen wir definieren was eine Kategorie ist:

Definition 2.1 (Kategorie). Eine Kategorie $\mathscr{C}$ ist:

- eine Klasse von Objekten ob $\mathscr{C}$
- für $A, B \in$ ob $\mathscr{C}$ eine Menge $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ eine Menge von Morphismen zwischen den Objekten
- für $A, B, C \in$ ob $\mathscr{C}$ eine Abbildung $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$ also Verkettung von Morphismen
- Assoziativität der Morphismen bezüglich $\circ$
- Für jedes $A \in$ ob $\mathscr{C}$ ein $id_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$ mit $id_A \circ f = f$ und $g \circ id_A = g$ für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A), g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$

Diese Definition ist bewusst recht allgemein gehalten um viele verschiedene Kategorien zu erlauben. Die Morphismen müssen dabei nicht unbedingt Abbildungen sein, sondern lediglich die oben genannte Definition erfüllen. Eine Klasse kann hier für alle Zwecke als Menge betrachtet werden.
Die folgenden Beispiele erfüllen alle oben genannten Axiome und sind daher Kategorien:

Beispiel 2.1.1 (**Grp**). Ist die Kategorie der Gruppen

- ob **Grp** $=$ alle Gruppen
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H) =$ Gruppenhompmorphismen von G nach H
- $\circ$: Komposition von Gruppenhomomorphismen

Das ist wohldefiniert und **Grp** ist eine Kategorie.

Beispiel 2.1.2. Mehr Beispiele

- $\mathbb{K}$-**VR** die Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume und Vektorraumhomomorphismen
- **Ringe** Die Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen
- **Körper** Die Kategorie der Körper und Körperhomomorphismen
- **Set** Die Kategorie der Mengen und aller Abbildungen

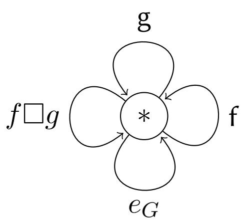
- **Ab** Abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- **Top** Topologische Räume und stetige Abbildungen
- **MRäume** Metrische Räume
- **Euklid** Euklidische Vektorräume und Subisometrien
- **Set*** Kategorie der punktierten Mengen ((M, m), M Menge, $m \in M$ $(M, m) \overset{f}{\mapsto} (N, n)$ Abbildung mit $f(m) = n$)

Beispiel 2.1.3. Eine Kategorie in der die Morphismen keine Abbildungen sind
Sei $(G, \square)$ eine Gruppe. **G** ist definiert als:

- ob $G := \{*\}$
- Hom$_{\mathbf{G}}(*, *) = G$
- für $f, g \in$ Hom$_{\mathbf{G}}(*, *)$ definiere $f \circ g := f \square g$
- $id_* = e_G$

Die Morphismen von **G** sind hier also keine Abbildungen, sondern die Elemente der Gruppe.

Oft werden Kategorien mit Hilfe von Graphen dargestellt. Die Objekte werden zu Knoten und die Morphismen zu Kanten. **G** würde daher folgendermaßen dargestellt:



Beispiel 2.1.4. Kategorie aus einer partiell geordneten Menge
Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge ($\leq$ ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation). **P** ist definiert als:

- ob **P** $:= P$
- für $x, y \in P$ definiere Hom$_{\mathbf{P}}(x, y) = \begin{cases} \{*_{xy}\} & x \leq y \\ \varnothing & x \nleq y \end{cases}$
- Sei $f \in$ Hom$_{\mathbf{P}}(x, y), g \in$ Hom$_{\mathbf{P}}(y, z)$ (also $x = *_{xy}$ und $g = *_{yz}$) dann $*_{yz} \circ *_{xy} = *_{xz}$
- $id_x = *_{xx}$

Diese Kategorie sähe als Graph folgendermaßen aus:

$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

Die Identitätsmorphismen und und Kompositionen der Morphismen werden im Graphen der Übersichtlichkeit halber nicht gezeichnet.

Definition 2.2. Isomorphismus
$f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ heißt Isomorphismus wenn es $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ existiert mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$

Man kann leicht sehen, dass es in Beispiel 2.1.4 keine nicht trivialen Isomorphismen geben kann. Dazu wäre es nötig, dass Morphismen der From $*_{yx}$ und $*_{xy}$ existieren. Dazu wäre es aber nötig, dass $x \leq y$ und $y \leq x$ gilt. Daraus folgt, dass $x = y$ gilt und somit der einzige Isomorphismus die Identität ist.

2.2 Funktoren

Es ist uns bereits Möglich Morphismen innerhalb von Kategorien zu definieren. Um auch zwischen Kategorien abbilden zu können und diese so in Relation zu setzen definieren wir Funktoren.

Definition 2.3. Funktor (Kovariant)
Seien $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathscr{C}$ nach $\mathscr{D}$ ist eine Zuordnung

- ob $\mathscr{C} \mapsto$ ob $\mathscr{D}$ ($A \in$ ob $\mathscr{C} \mapsto \mathcal{F}(A)$)
- und eine Zuordnung für $A, B \in$ ob $\mathscr{C}$ mit $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ sodass $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "f \circ g"'] & \\ & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd} \qquad \text{Wird vom Funktor abgebildet auf} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[dr, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[dd, "\mathcal{F}(f \circ g)"'] & \\ & \mathcal{F}(B) \arrow[dl, "\mathcal{F}(g)"] \\ \mathcal{F}(C) & \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.2.1. Vergissfunktor
$?$: **K-Vec** $\mapsto$ **Set**
$(V, +, \cdot) \mapsto V$ bildet einen Vektorraum auf die Menge der Vektoren ab und vergisst dabei alle anderen Informationen wie z.B. über welchem Körper der Vektorraum definiert war und jegliche Operationen.

Beispiel 2.2.2. Ein Endofunktor
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\mathcal{F}$: **K-Vec** $\mapsto$ **K-Vec** mit $W \mapsto V \times W$. Funktoren mit gleicher Definitions und Bildkategorie nennt man Endofunktoren.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "f"'] & V \times W \arrow[d, "f \circ \mathcal{F}"] & (v,w) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\mathcal{F} \circ f"] & V \times X & (v, f(w))
\end{tikzcd}$$

Also werden Objekte aus der Definitions- auf Objekte aus der Bildkategorie und Morphismen aus der Definitions- auf Morphismen aus der Bildkategorie abgebildet. (Das Diagramm muss nicht unbedingt kommutieren)
Bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W_2 \arrow[r, "g"] & W_3
\end{tikzcd}$$

Also:

$$V \times W_1 \longrightarrow V \times W_3$$

$$(v,w) \longrightarrow (v, (g \circ f)(w)) \qquad \mathcal{F}(g \circ f)$$

und

$$V \times W_1 \longrightarrow V \times W_2 \longrightarrow V \times W_3$$

$$(v,w) \longrightarrow (v, f(w) \to (v, g(f(w)) \qquad \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$$

Man sieht also, dass $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ gilt. Damit ist $\mathcal{F}$ ein Funktor.

Beispiel 2.2.3. Der Hom-Funktor (Kovariant)
Es sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$
Definiere den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \_) : \mathscr{C} \mapsto$ **Set**

- $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$
  Ein $Y \in \mathscr{C}$ wird also auf die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, die Morphismen, die in $\mathscr{C}$ von X auf Y existieren, abgebildet.
- $[Y \xrightarrow{f} Z] \mapsto f^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, f) := \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z) \\ [g : X \mapsto Y] \mapsto [f \circ g : X \mapsto Z] \end{bmatrix}$
  Gehen wir also von beliebigen $X, Y \in \mathscr{C}$ aus, zwischen denen ein Morphismus f existiert, so werden diese vom Hom-Funktor auf die Morphismenmengen $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$ abgebildet. Das heißt, dass wir jetzt noch definieren müssen, worauf die Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ abgebildet werden. Wir müssen also jeden Morphismus aus $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ auf einen Morphismus $\mathrm{Hom}_{\mathbf{set}}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z))$ abbilden. Dies geschieht, indem wir ihn einfach mit einem entsprechenden passenden Morphismus verknüpfen. Wir identifizieren also jeden Morphismus $g : X \mapsto Y$ mit seiner

Verknüpfung mit $f : Y \mapsto Z$ und erhalten so einen neuen Morphismus f^*, der die geforderten Bedingungen erfüllt.

Beispiel 2.2.4. R1ng $\mapsto$ Grp
$R \mapsto R^\times = \{r \in R | \exists s \in R : rs = 1_R\}$
$[R \to S] \mapsto \begin{bmatrix} R^\times \xrightarrow{f^\times} S^\times \\ f^\times = f \end{bmatrix}$
Man schränkt den Ring also auf alle invertierbaren Ringelemente ein und lässt nur noch die Abbildungen übrig, die ohnehin schon zwischen invertierbaren Elementen abgebildet haben.

Beispiel 2.2.5. Set $\mapsto$ K-VR
Definiere
$M \mapsto \mathrm{Abb}_0(M, \mathbb{K}) = \{\mathrm{Abb}\ M \mapsto \mathbb{K} \text{ fast überall } 0\}$ (Freier Vektorraum über M)
$\mathcal{F}(M) := \left\{ \sum_{m \in M} \lambda_m \cdot m | \lambda_m = 0 \text{ ffa } m \in M, \lambda_m \in \mathbb{K} \right\}$

$$\left\{ \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\mathsf{f}"] \\ N \end{tikzcd} \right\} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(M) \arrow[d] & \sum \lambda_m \cdot m \arrow[d] \\ \mathcal{F}(N) & \sum \lambda_m \cdot f(m) \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.2.6. Grp $\mapsto$ Ab (Abelisierung)
$G \mapsto G^{ab} = G_{/H}$ mit $H = \langle\langle \{h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} | h_1, h_2 \in G\} \rangle\rangle$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, "\phi"] & & G_1^{ab} \arrow[d, "\phi"] \\ G_2 & \phi \arrow[r] & G_2^{ab} \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.2.7. Graphen
Definiere **Grph** exemplarisch als folgende Kategorie:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{E} \cdot \arrow[r, "{s, t, u, \dots}"] \arrow[loop above] & \cdot \mathsf{V} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Dann gibt es Funktoren $\mathcal{F}$: **Grph** $\mapsto$ **Set** mit

$$\mathcal{F}(E) \cdot \xrightarrow{\mathcal{F}(s), \mathcal{F}(t), \mathcal{F}(u), \dots} \cdot \mathcal{F}(V)$$

Diese Funktoren bilden Graphen auf ihre Knoten- und Kantenmengendarstellung ab.

Beispiel 2.2.8. Der Hom-Funktor (Kontravariant)
Es sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathsf{ob}\,\mathscr{C}$
Definiere den Funktor $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(\_, X) : \mathscr{C} \mapsto \mathbf{Set}$

- $Y \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$
  Ein $Y \in \mathscr{C}$ wird also auf die Morphismenmenge $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$, die Morphismen, die in $\mathscr{C}$ von Y auf X existieren, abgebildet.
- $[Y \xrightarrow{f} Z] \mapsto f^* = \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X, f) := \begin{bmatrix} \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X) \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \\ [g : Z \mapsto X] \mapsto [g \circ f : Y \mapsto X] \end{bmatrix}$
  Der Funktor agiert analog zu seinem Kovarianten Gegenstück.

Beispiel 2.2.9. Punktierung von Mengen
Definitions und Bildkategorie: $\mathbf{Set} \mapsto \mathbf{Set}^*$
Objekte: $M \mapsto (M \cup \{\star_m\}, \star_M)$
Morphismen:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dd, "f"'] & & M \cup \{\star_M\} \arrow[dd, "f \cup id_\star : m \mapsto f(m) \text{ und } \star_M \mapsto \star_N"] \\ & \mapsto & \\ N & & N \cup \{\star_N\} \end{tikzcd}$$

Man fügt als ein Element hinzu, das jetzt das punktierte Element ist und definiert die Morphismen so dass sie auf die Elemente der punktierten Menge wie vorher angewandt werden und das punktierte Element in M auf das punktierte Element in N abgebildet wird.

Definition 2.4. Opposite Kategorien
Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie. Definiere $\mathscr{C}^{op}$ wie folgt:

- $\mathsf{ob}\,\mathscr{C}^{op} := \mathsf{ob}\,\mathscr{C}$
- Für $A, B \in \mathsf{ob}\,\mathscr{C}$ definiere $\mathsf{Hom}^{op}_{\mathscr{C}}(A, B) := \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$

Wir drehen also alle „Morphismenpfeile” um und nutzen die gleichen Objekte.

Man sieht, dass ein kontravarianter Funktor $\mathscr{C} \mapsto \mathscr{D}$ einem kovarianten Funktor $\mathscr{C}^{op} \mapsto \mathscr{D}^{op}$ entspricht.

3 Kegel und Ko

3.1 Kegel und Limiten

Definition 3.1. Diagramm
Ein Diagramm in einer Kategorie $\mathscr{C}$ ist ein Funktor
$\mathcal{F} : I \mapsto \mathscr{C}$ von einer kleinen[1] Kategorie I. Ein Diagramm bettet also quasi eine kleine Kategorie in eine andere ein.

Definition 3.2. Kegel
Ein Kegel über einem Diagramm $\mathcal{F}$ ist ein Objekt K aus $\mathscr{C}$ und Morphismen $K \xrightarrow{f_i} \mathcal{F}(i)$ für alle $i \in \text{ob } I$ sodass alle Diagramme kommutieren.

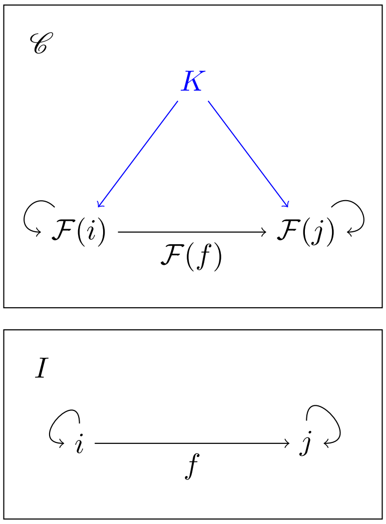


Abbildung 1: Eine Kategorie $\mathscr{C}$ und eine Kleine Kategorie I, die vom Diagramm $\mathcal{F}$ in $\mathscr{C}$ abgebildet wird. Außerdem der Kegel K in blau.

$\mathcal{F}(f) \circ f_i = f_j$ für alle $f \in \text{Hom}_I(i, j)$.

Definition 3.3. Limes
Ein Limes über einem Diagramm $\mathcal{F}$ ist ein universeller Kegel L:

[1]Eine Kategorie heißt klein, wenn die Klasse ihrer Morphismen eine Menge ist. Nicht kleine Kategorien werden hier nicht betrachtet.

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, dotted] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\
\mathcal{F}(i) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(j)
\end{tikzcd}
$$

Ein Kegel, sodass für jeden Kegel K über $\mathcal{F}$ ein eindeutiger Morphismus $K \mapsto L$ existiert, sodass $f_i = g_i \circ (K \mapsto L)$. Der Limes ist hier rot dargestellt und der Beispielkegel blau.

Nachdem nun definiert wurde was Diagramme, Kegel und Limiten sind, sollen nun einige Beispiele angeführt werden, wie eben solche Kegel und Limiten über bestimmten Kategorien aussehen können.

Beispiel 3.1.1. Leere Kategorie
Es sei I die leere Kategorie. Also ob $I = \varnothing = \mathrm{Hom}_I(\cdot, \cdot)$.

- Allgemein: $lim(I) =$ terminales Objekt
- Für **set** : $\text{Kegel}_I =$ ob **set** und $lim(I) = \{*\}$
- Für **grp** $= \{e\}$
- Für **K-VR** $= \{0\}$

Dieses Beispiel ist relativ uninteressant, da I keine Objekte enthält und somit die Anforderungen um Kegel bzw. Limiten zu finden nicht besonders hoch sind.

Beispiel 3.1.2. Einelementige Kategorie
Sei $I = \begin{tikzcd} \underset{i}{\cdot} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ die Kategorie mit einem Element und dem Identitätsmorphismus. Betrachten wir nun allgemein eine Kategorie $\mathscr{C}$ und ein Diagramm $\mathcal{F} : \mathscr{C} \mapsto I$. Dann gilt $\text{Kegel}_{\mathscr{C}}(I) = \left\{\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d] \\ \cdot \end{tikzcd}\right\}$=Alle Objekte in $\mathscr{C}$, die einen Morphismus nach $\mathcal{F}(i)$ haben.
$\lim(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(i)$:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dd] & \\ & \cdot \arrow[ul, dotted] \arrow[dl] \\ \mathcal{F}(i) & \end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Ein allgemeines Diagramm für Kegel (blau) und Limes (rot) über dieser Kategorie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(i) \arrow[d] & \cdot \arrow[l, dotted] \arrow[dl] \\ \mathcal{F}(i) & \end{tikzcd}$$

Abbildung 3: Das selbe Diagramm erhält man, wenn man $\lim \mathcal{F} = \mathcal{F}(i)$ setzt.

Beispiel 3.1.3. Kategorie mit zwei Objekten
Es sei I= $(\cdot \quad \cdot)$ eine kleine Kategorie. Dann suchen wir einen Limes L, sodass für alle Kegel folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, dotted] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & L \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd}$$

Für **set**:
gegeben M, N. Dann ist $\lim \left(\cdot \quad \cdot \right)$:= Produkt.

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, bend right, "f_M"'] \arrow[dr, bend left, "f_N"] \arrow[d, dotted] & \\
 & M \times N \arrow[dl, "\Pi_M"] \arrow[dr, "\Pi_N"'] & \\
M & & N
\end{tikzcd}
$$

Wobei T hier ein Testobjekt aus **set**, $\Pi_M((m,n)) = m$ und der Morphismus $T \mapsto M \times N$ definiert ist als $t \mapsto (f_M(t), f_N(t))$. Analog funktionieren die Limiten für **Grp** und **K-VR**.

Lemma 3.2. Limiten sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphismen.
Sei $D : \mathcal{I} \mapsto \mathscr{C}$ ein Diagramm, $(L, f_*), (\tilde{L}, \tilde{f}_*)$ Limiten über D.

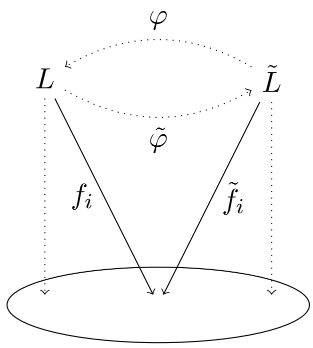
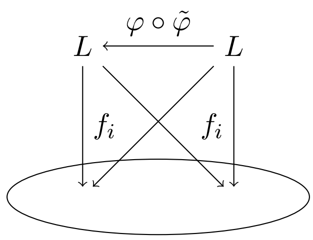


Abbildung 4: Zwei Limiten über einem Diagramm und zugehörige Morphismen

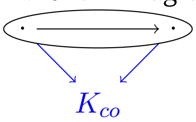
L Limes $\Rightarrow$ Es existiert ein $\varphi : \tilde{L} \mapsto L$ mit $f_i \circ \varphi = \tilde{f}_i$ für alle $i \in I$.
$\tilde{L}$ Limes $\Rightarrow$ Es existiert ein $\tilde{\varphi} : L \mapsto \tilde{L}$ mit $\tilde{f}_i \circ \tilde{\varphi} = f_i$
Beh: $\varphi = \tilde{\varphi}^{-1}$



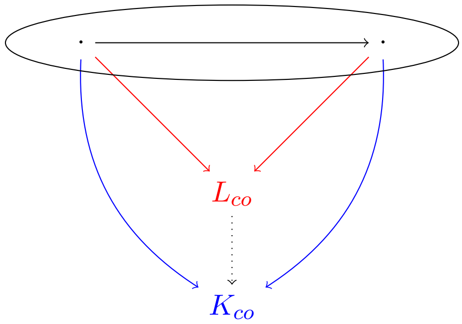
$f_i \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}) = \tilde{f}_i \circ \tilde{\varphi} = f_i$ Also $f_i \circ (id_L) = f_i$
$\Rightarrow \varphi \circ \tilde{\varphi} = id_L$
Analog: $\tilde{\varphi} \circ \varphi = id_{\tilde{L}}$ $\square$

3.3 Kokegel und Kolimes

Definition 3.4. Kokegel & Kolimes
Sei $D : I \mapsto \mathscr{C}$ ein Diagramm.

Kokegel: 

Ein Objekt K aus $\mathscr{C}$, sodass von jedem Objekt aus $\mathscr{C}$ Morphismen auf K existieren und alle Dreiecke kommutieren.
Ein Kolimes ist ein universeller Kokegel:



Ein Kokegel, sodass auf jeden anderen Kokegel ein Morphismus existiert und alle Dreiecke kommutieren.

Beispiel 3.3.1. Kolimiten für $I = \varnothing$

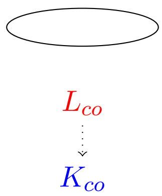


Abbildung 5: Die leere Kategorie als Bild des Diagramms und wie der zu findende Kolimes im Verhältnis zu dieser stehen muss.

Diesen Kolimes nennt man allgemein auch *Initiales Objekt*. Folgende Objekte sind initiale Objekte der jeweiligen Kategorie:

- **set** $\varnothing$
- **Grp** $\{e\}$
- **K-VR** $\{0\}$
- **Top** $\varnothing$

- **R1ng** $\mathbb{Z}$

Dies lässt sich leicht verifizieren, indem man prüft, dass die jeweiligen initialen Objekte die Kolimeseigenschaften der respektiven Kategorie erfüllen.

Beispiel 3.3.2. $I = \left(\cdot \quad \cdot\right)$
Für dieses I sind die Kolimiten die *Koprodukte*.
Beispiel **Set**:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "m \mapsto m"] \arrow[ddr, bend right, "f_M"'] & & N \arrow[dl, "n \mapsto n"'] \arrow[ddl, bend left, "f_N"] \\
& M \dot{\cup} N \arrow[d, dotted, "\varphi"] & \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : M \dot{\cup} N \mapsto T \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} f_M(x) & x \in M \\ f_N(x) & x \in N \end{cases}$$

Beispiel **K-VR**:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "v \mapsto (v,0)"] \arrow[ddr, bend right, "f_V"'] & & W \arrow[dl, "w \mapsto (0,w)"'] \arrow[ddl, bend left, "f_W"] \\
& V \oplus W \arrow[d, dotted, "\varphi"] & \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi : V \oplus W \mapsto T \text{ mit } (v, w) \mapsto f_V(v) + f_W(w)$$

Beispiel **Grp**:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "f_G"'] & & H \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left, "f_H"] \\
& G * H \arrow[d, dotted, "\varphi"] & \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$G * H$ bezeichnet dabei die Menge aller Worte in G und H.
$\varphi : G * H \mapsto T$ ersetzt im Wort g durch $f_G(G)$ und h durch $f_H(h)$.

3.4 Pullback und Pushout

Definition 3.5. Pullback

Ein Pullback ist der Limes des Diagramms $\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$ also ein Limes L, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\
& \cdot \arrow[r] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Abbildung 6: Das Kommutative Diagramm für einen Pullback

Beispiel 3.4.1. Pullback über der Kategorie **K-VR**
Damit P ein Pullback ist, muss folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\Pi_V"] \arrow[d, "\Pi_V"'] & W \arrow[d, "f_W"] \\
V \arrow[r, "f_V"'] & X
\end{tikzcd}$$

Mit $P := \{(v, w) \in V \times W | f_V(v) = f_W(w)\}$
Es ist also zu zeigen, dass:

- P ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist
- P Limes über dem Diagramm ist

P ist $\mathbb{K}$-Vektorraum:
$(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v + \tilde{v}, w + \tilde{w})$
$f_V(v + \tilde{v}) = f_V(v) + f_V(\tilde{v}) = f_W(w) + f_W(\tilde{w}) = f_W(w + \tilde{w})$
$\implies$ P ist $\mathbb{K}$-Vektorraum.
P ist ein Limes: Da P Morphismen auf alle Objekte im Bild des Diagramms hat, ist P ein Kegel.
Betrachte folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "g_W"] \arrow[ddr, bend right, "g_V"'] & & \\
& P \arrow[r, "\Pi_W"] \arrow[d, "\Pi_V"'] & W \arrow[d, "f_W"] \\
& V \arrow[r, "f_V"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Wir müssen also ein φ definieren, sodass $\Pi_V \circ \varphi = g_V$ und $\Pi_W \circ \varphi = g_W$ gilt und das Diagramm kommutiert.
Definiere dazu $\varphi : T \mapsto P$ als $t \mapsto (g_V(t), g_W(t))$
$\implies$ P ist Limes.
Da P ein Vektorraum und Limes über dem Pullbackdiagramm ist, ist P Pullback über **K-VR**.
□

Definition 3.6. Pushout

Ein Pushout ist der Kolimes des Diagramms $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \\ \cdot & \end{tikzcd}$. Also ein Kolimes, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\cdot \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & P \arrow[dr, dotted] & \\
& & T
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 7: Das kommutative Diagramm für einen Pushout.

Beispiel 3.4.2. Pushout über **K-VR**
Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_W"] \arrow[d, "f_V"'] & W \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "g_W"] & \\
V \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g_V"'] & V \coprod_X W \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Wobei $V \coprod_X W := \{(v, w) \in V \times W\}_{/U}$ mit $U = \{(-f_V(x), f_W(x))|x \in X\}$
$V \mapsto V \coprod_X W$ ist definiert als $v \mapsto [(v, 0)]$ und
$\varphi : V \coprod_X W \mapsto T$ ist definiert als $[(v, w)] \mapsto g_V(v) + g_W(w)$

3.5 Kern und Kokern

Definition 3.7. Kern

Der Kern ist der Limes über dem Diagramm $\bullet \overset{0}{\rightrightarrows} \bullet$. $0_{A,B} \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ ist dabei so definiert, dass für jeden Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ $0_{A,B} + f = f = f + 0_{A,B}$ gilt. Nicht in jeder Kategorie existiert solch eine Abbildung.
Gesucht ist also ein Kegel K und eine Abbildung ι, sodass folgendes Diagramm kommutiert und $0 \circ \iota = f \circ \iota$ gilt:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, dotted] \arrow[dr] & & \\
K \arrow[rr, "\iota"] & & \bullet \arrow[r, "0"] \arrow[r, bend right, "f"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Abbildung 8: Das Kommutative Diagramm für einen Kern

Auch der Kern existiert nicht in jeder Kategorie. Die Kategorien **Ab**, **Grp** und **K-VR** haben beispielsweise einen Kern wohingegen **Set** keinen Besitzt.

4 Natürliche Transformationen